Urkunde

Mathematik-Wettbewerb 2017/18

Aurelia Schmiegelow

Jahrgangsstufe 9
Internationale Friedensschule

hat am 18. November 2017 an der

Stadtrunde Köln der Mathematik-Olympiade

teilgenommen .

Aurelia Schmiegelow 2017

Olympiadeklassen 9 – 10

57. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Jahrgangsrunden 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

571011

Bernd und Inge spielen folgendes Spiel:

Zu Beginn liegt ein Stapel Karten auf dem Tisch, der mindestens drei Karten enthält.

Die beiden sind abwechselnd am Zug.

Im ersten Zug teilt Bernd den Stapel in zwei kleinere Stapel auf. Es sind nur Stapel mit mindestens einer Karte zugelassen.

Jeder folgende Zug besteht aus zwei Teilen. Zunächst ist ein Stapel zu entfernen. Danach ist der andere in zwei kleinere Stapel zu zerlegen. Am Ende eines Zuges liegen also stets genau zwei Stapel auf dem Tisch.

Damit ein Zug möglich ist, muss wenigstens einer der Stapel auf dem Tisch mehr als eine Karte aufweisen.

Gewonnen hat, wer den letzten (möglichen bzw. gültigen) Zug machen konnte.

a) Der (Start-)Stapel enthält genau vier Karten. Wie kann Bernd gewinnen? Besteht die Möglichkeit, dass Inge gewinnt?

b) Für welche Größen des Startstapels (bzw. für welche Anzahl der Karten im Startstapel) kann Bernd den Gewinn erzwingen, für welche Größen gelingt dies Inge?

571012

Für ganze Zahlen m und n gelte $(n^2 + n) \cdot (m^2 - 1) = 240$.

Bestimmen Sie unter Beachtung aller Lösungsmöglichkeiten den kleinsten und den größten Wert der Differenz $n - m$.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

571013

Es gibt positive ganze Zahlen n, also $n > 0$, für die sowohl n als auch deren Quersumme $Q(n)$ durch 57 teilbar ist. Solche Zahlen n werden in dieser Aufgabe betrachtet.

a) Geben Sie zwei Beispiele für solche Zahlen n an und weisen Sie nach, dass diese Zahlen die gestellten Bedingungen erfüllen.

b) Ermitteln Sie die kleinste Zahl n mit dieser Eigenschaft und weisen Sie nach, dass sie die gestellten Bedingungen erfüllt.

571014

Gegeben sind die beiden Funktionen a und b mit den Gleichungen $a(x) = -2\,|x| + 11$ und $b(x) = \frac{1}{2}\,|x - 7|$.

a) Stellen Sie die Graphen der Funktionen a und b in einem rechtwinkligen Koordinatensystem dar.

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte der Graphen von a und b.

c) Der Punkt C sei der Schnittpunkt des Graphen der Funktion a mit der y-Achse. Beweisen Sie, dass der Punkt C und zwei der Schnittpunkte der Graphen von a und b ein rechtwinkliges Dreieck bestimmen.

571015

Gegeben sei ein (nicht überschlagenes) Viereck $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, $|AD| = |DC| = |CB|$ und $|DB| = |BA| = |AC|$.

Bestimmen Sie die Größen der Innenwinkel dieses Vierecks.

571016

In der Ebene sind zwei Punkte A und B mit dem Abstand $|AB| = 7$ gegeben; außerdem seien x und y positive reelle Zahlen.

Gesucht sind alle Punkte P, für die $|PA|$ eine der Zahlen 5, x und y ist und gleichzeitig $|PB|$ eine der Zahlen 5, x und y ist. (Es ist also auch erlaubt, für beide Strecken eine gleiche Länge zu wählen.)

a) Wie viele solche Punkte P gibt es für $x = 4$ und $y = 12$?

b) Bestimmen Sie die Menge M aller derjenigen Paare (x, y), für die es genau 18 solche Punkte P gibt.
Skizzieren Sie M in einem rechtwinkligen Koordinatensystem.

Matheolympiade Aurelia Schmiegelow

57|011

a) Bernd kann gewinnen indem er den vierer Stapel in zwei teilt, mit jeweils drei Karten in einem Stapel und eine im anderen. So muss der einer Stapel entfernt werden und der dreier in zwei geteilt werden: 2 Karten in einem und 1 Karte im anderen. Das heißt dann, dass Bernd den einer Stapel entfernen und den zweier in zwei teilen muss. Da dann nur noch Stapel mit einer Karte übrig sind, kann Inge keinen Zug mehr machen und Bernd hat gewonnen.

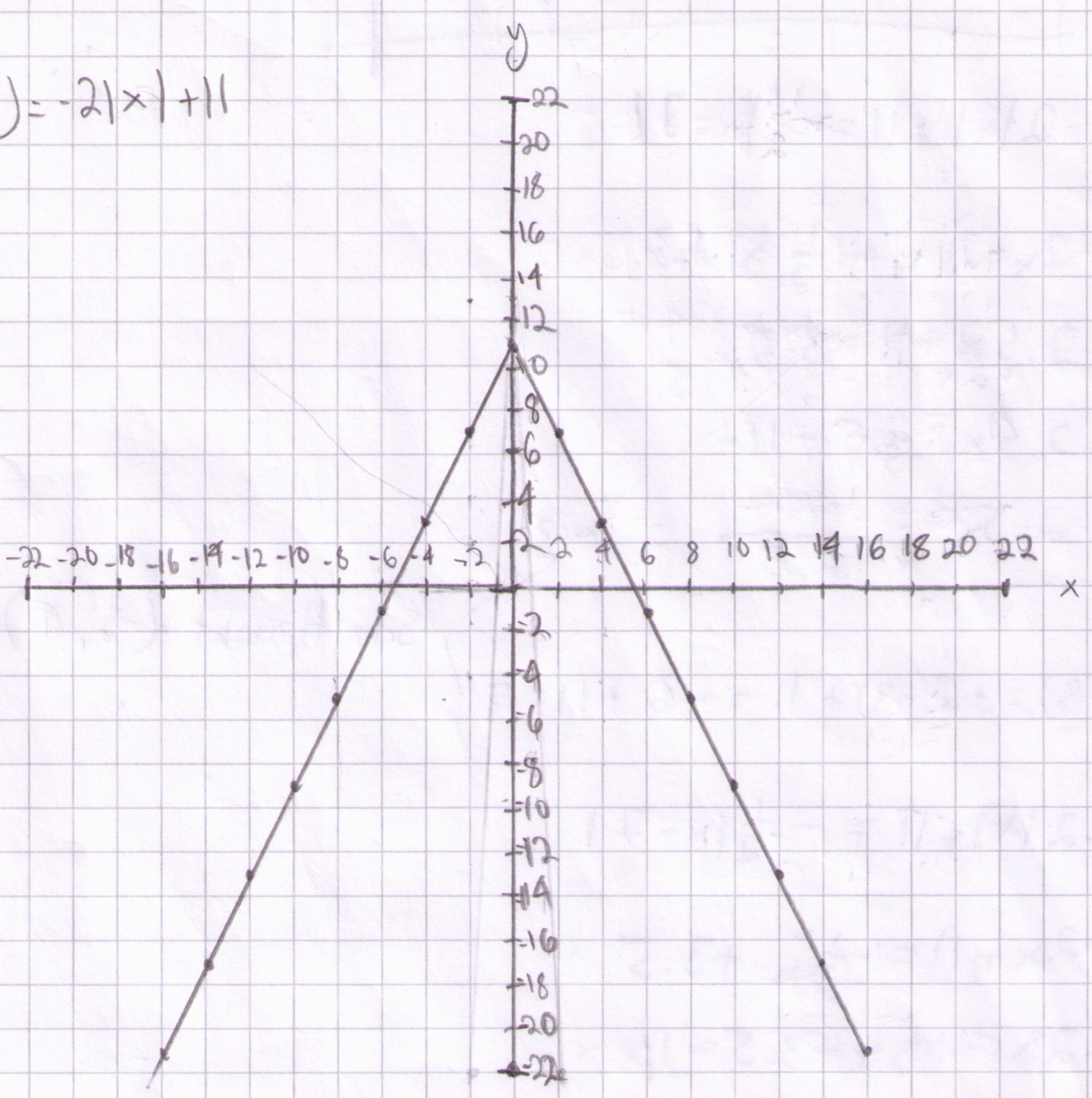
Ing, wiederrum, kann gewinnen wenn Bernd den vierer Stapel in zwei, zweier Stapel teilt. Inge entfernt dann einen Stapel und teilt den anderen in zwei. Da jetzt nur noch zwei Stapel mit jeweils einer Kart übrig sind, kann Bernd keinen Zug machen und Inge hat gewonnen.

b) Bernd (Anzahl an Karten um Gewinnen zu können: gerade Anzahl
Inge: Ungerade Anzahl

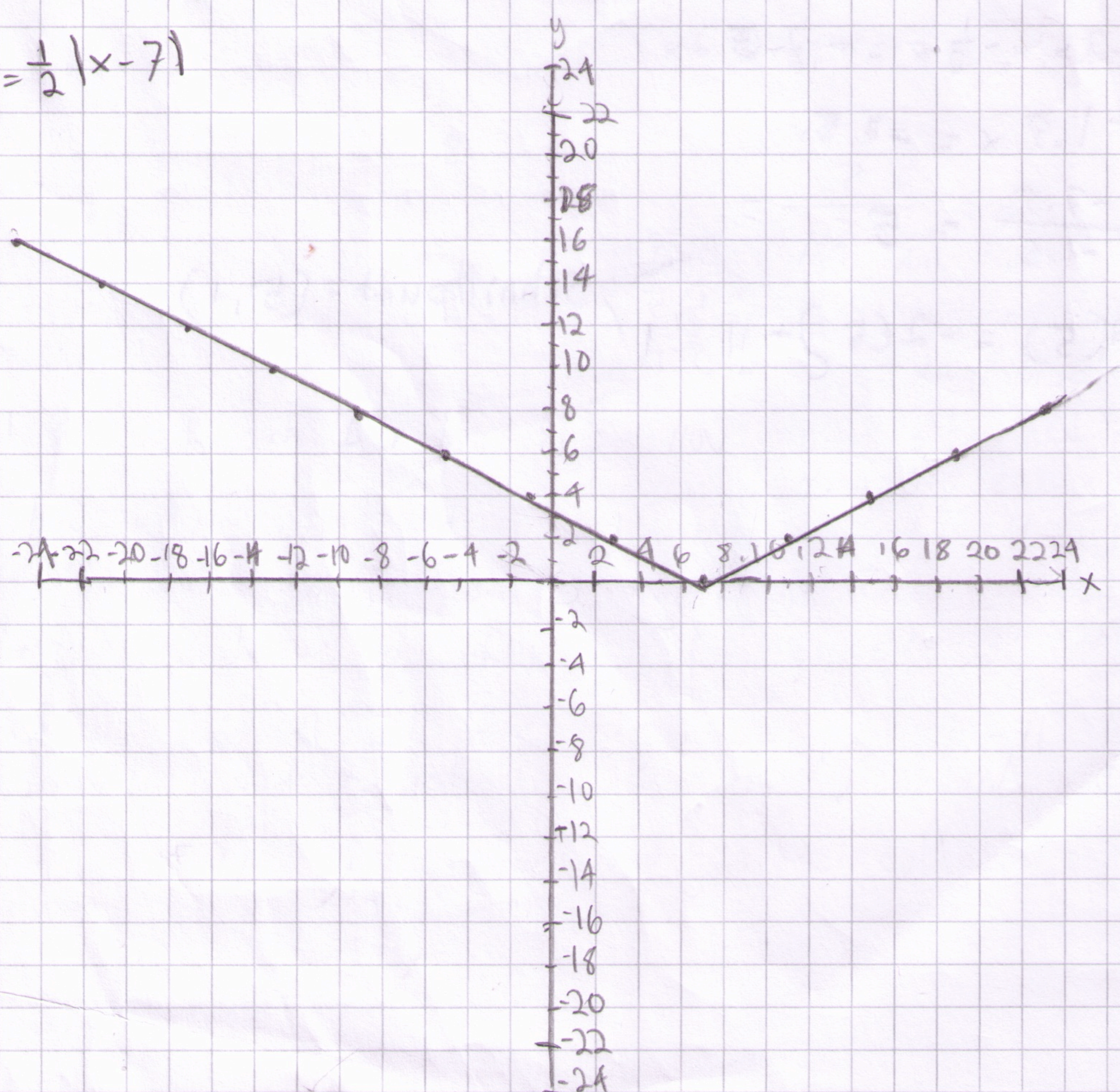
57|0|4

a)

$a(x) = -2|x| + 11$



$b(x) = \frac{1}{2}|x-7|$



b) $\boxed{\text{Schnittpunkte: } (-3, 5) \quad (5, 1)}$

$2|x| + 11 = -\frac{1}{2}|x-7|$

$2x + 11 = -\frac{1}{2}x + 3.5$

$2.5x + 11 = 3.5$

$2.5x = 3.5 - 11$

$2.5x = \frac{-7.5}{2.5} = -3$

Schnittpunkt = $(-3, 5)$

$a(-3) = -2(-3) + 11 = -6 + 11 = 5$

$-2|x| + 11 = -\frac{1}{2}|x-7|$

$-2x + 11 = -\frac{1}{2}x + 3.5$

$-2x = -\frac{1}{2}x + 3.5 - 11$

$-2x - -\frac{1}{2}x = -7.5$

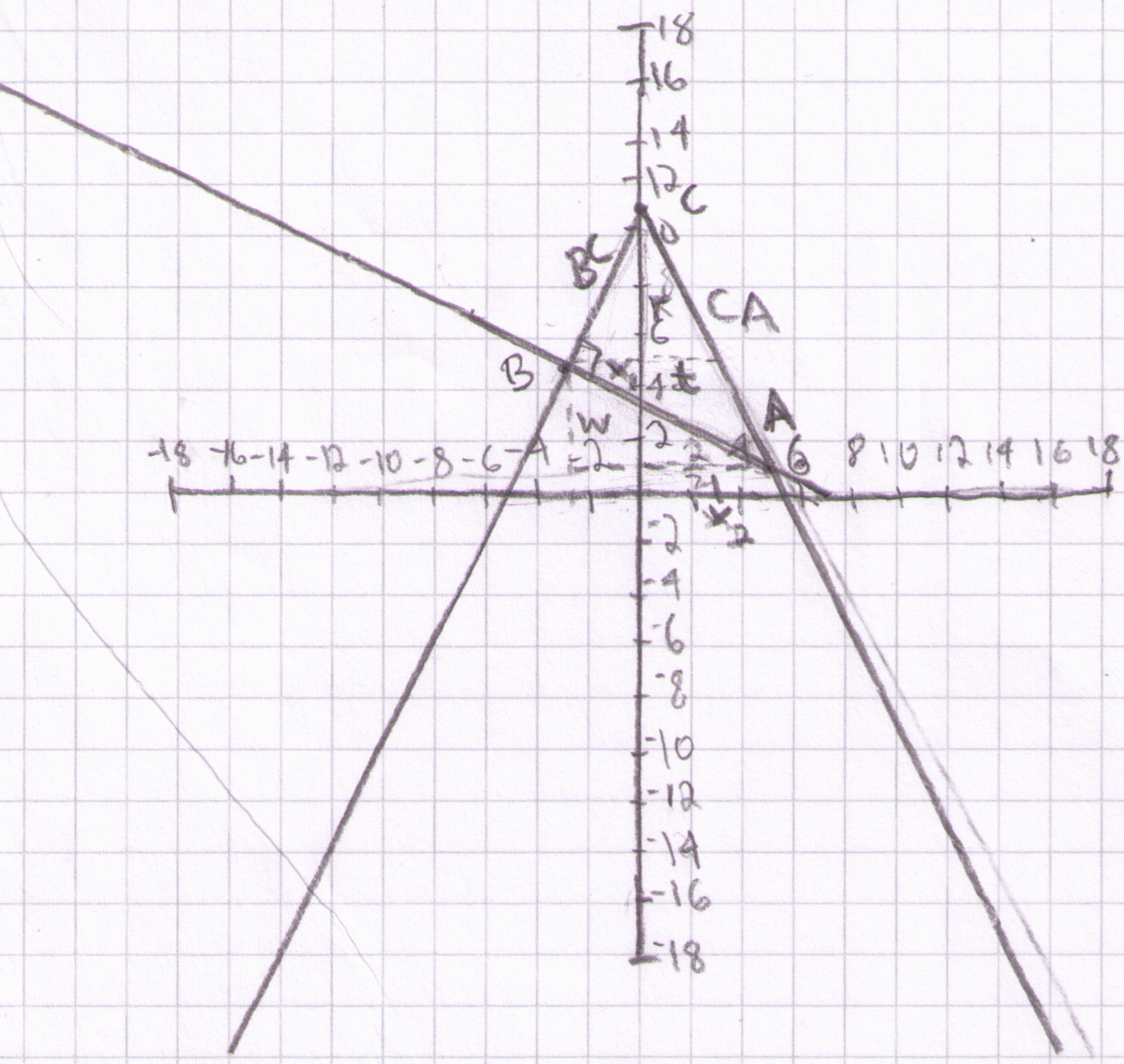
$-1.5x = -7.5$

$\frac{-7.5}{-1.5} = 5$

Schnittpunkt = $(5, 1)$

$a(5) = -2(5) + 11 = 1$

c)



$k = 6$
$x_1 = 3$
$t = 3$
$z = 5$
$y = 10$
$w = 4$
$x_2 = 8$

$x_1^2 + k^2 = BC^2$
$z^2 + y^2 = CA^2$
$x_2^2 + w^2 = BA^2$

$3^2 + 6^2 = BC^2 \quad 9 + 36 = \sqrt{45} \approx 6.7$
$5^2 + 10^2 = CA^2 \quad 25 + 100 = \sqrt{125} = 11.2$
$8^2 + 4^2 = BA^2 \quad 64 + 16 = \sqrt{80} = 8.9$

$BC = 6.7$
$CA = 11.2$
$BA = 8.9$

$BC < BA < CA$

$BC^2 + BA^2 = CA^2$
$6.7^2 + 8.9^2 = 11.2^2$

Zu beweisen ist:

$BC^2 + BA^2 = CA^2$

Mit dem Satz des Pythagoras und den implizit gegebenen Seitenlängen der Rechtwinkligen Dreiecken, die man mit Seiten BA, CA und BC bilden kann, kann man die Seitenlängen BA, CA und BC errechnen.

$BA \approx 8.9 \quad BC \approx 6.7 \quad CA \approx 11.2$

wenn die Schnittpunkte A und B und der Scheitelpunkt C ein rechtwinkliges Dreieck ergeben, gelte:

$BA^2 + BC^2 = CA^2$

$8.9^2 + 6.7^2 \approx 124 \quad \sqrt{124} \approx 11.2.$

Also ist die Annahme, dass ABC ein rechtwinkliges Dreieck ist, korrekt.

571015

DB = BA = A C
AD = DC = CB
AB || DC

Punkte A B CD bilden ein viereck, dass entweder ein:
- Trapez
- Rechteck
- Quadrat
- Raute
- Unregelmäßiges Viereck
- Parallelogram
- oder ein Drachen

sein kann. In dem Fall sind die diagonalen DB und AC. Weil diese AB gleichen, sind das Trapez, Rechteck, Parallelogram und unregelmäßiges Viereck ausgeschlossen.
Außerdem sind längen AB und DC paralel, was wiederum den Drachen ausschließt

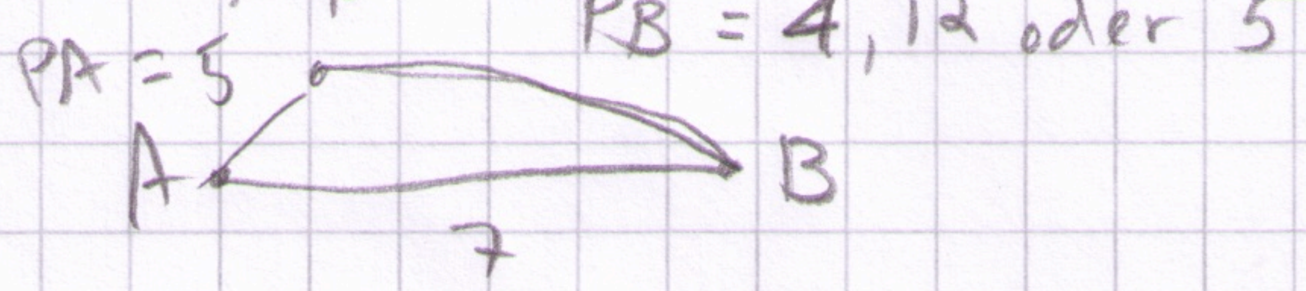
Übrig sind das Quadrat und die Raute, die die Kriterien erfüllen, und da die Innenwinkel beider Formen 90° sind, ist die Antwort:

$\boxed{90°}$

571016

a) |PA| und |PB| können nur 5, 4 oder 12 sein. Also gibt es 3 × 3 mögliche Konstellation, weil man, wenn man |PA| fixiert, drei mögliche |PB| werte hat.

Zum beispiel:



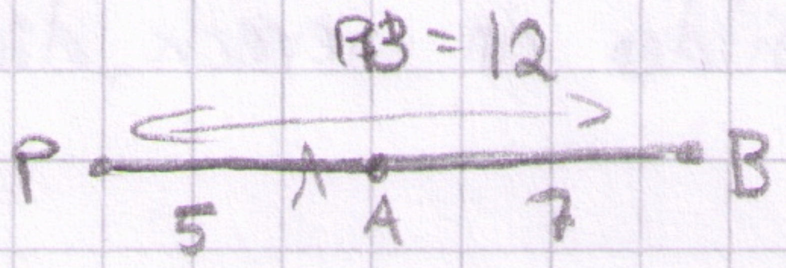
Da die Koordinaten P_s aber auch im negativen Bereich sein können wird d menge von P dupliziert.
Also gibt es **18** Punkte P, wo |PA| = 5, 4 oder 12 und |PB| = 5, 4 oder 12

b) $\boxed{M = 132}$

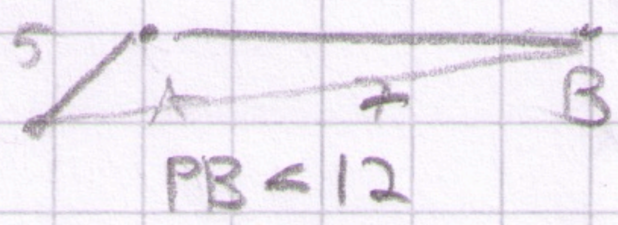
$|PB| = 5$, ~~x~~ oder y $|PA| = 5$, x oder y

Weil $|AB|$ 7 ergibt, können x und y nicht größer als 12 sein, denn

$$5+7 = 12$$



möglich



Weil es zwölf y koordinaten gibt, gibt pro jeden fixierten x koordinaten zwölf mögliche Konstellationen.

Da es auch 12 mögliche x Koordinaten gibt, gilt:

$$m = 12 \times 12 - n$$

wo n = Konstellationen mit x und y koordinaten, die sich gleichen

Weil ~~es~~ $n = 12$, gilt:

$$m = 12 \times 11$$

und $12 \times 11 = 132$, also gilt: $\boxed{M = 132}$

b)

M = 132